

*Doğuş Üniversitesi Dergisi, 16 (1) 2015, 35-50*

## **BİST100 ENDEKSİ FİYAT ve İŞLEM HACMİNİN FRAKTALLIK ANALİZİ**

### ***FRACTALITY ANALYSIS of BIST100 INDEX RETURNS and VOLUME***

**Samet GÜNAY**

*İstanbul Arel Üniversitesi, Uygulamalı Bilimler Yüksekokulu, Bankacılık ve Finans Bölümü  
dr.sgunay@gmail.com*

**ÖZET:** Bu çalışmada 04.01.2000-19.03.2014 dönemi için BIST100 Endeksi'nin getirileri ve işlem hacminin fraktal yapısı incelenmiştir. Fraktallık testlerinde uzun dönemli bellek analizleri ve fraktal boyut hesaplama yöntemleri kullanılmıştır. Uzun dönemli bellek hesaplamalarında Dönüştürülmüş Genişlik analizi, Eğilimden Arındırılmış Dalgalanma Analizi ve Smith'in (2005) modifiye GPH analizi kullanılırken, fraktal boyut hesaplamalarında Kutu Sayım, Yarı-Periyodogram ve Variogram yöntemleri uygulanmıştır. Elde edilen sonuçlar tüm yöntemler için tutarlı olup, hem BIS100 endeks getirilerinde hem de işlem hacminde fraktal bir yapı olmadığı görülmüştür.

**Anahtar Kelimeler:** Uzun Dönemli Bellek; Fraktal Boyut; Kendine Benzerlik; Fraktallık

**ABSTRACT:** In this study, we examined the fractal structure of the BIST100 index returns and volume during the period of 04.01.2000-19.03.2014. In the fractality tests we used long memory analysis and the fractal dimension calculation methods. Long memory analysis was conducted via Rescaled Range (R/S) analysis, Detrended Fluctuation Analysis (DFA) and Smith's (2005) modified GPH analysis; fractal dimension calculations were performed with Box-Counting, Semi-Periodogram and Variogram methods. Results showed that all findings of the different methods consistent with each other, and there is no fractality in the BIST100 index returns and volume.

**Keywords:** Long Memory; Fractal Dimension; Self-Similarity; Fractality

**JEL Classifications:** C14; C22; G10

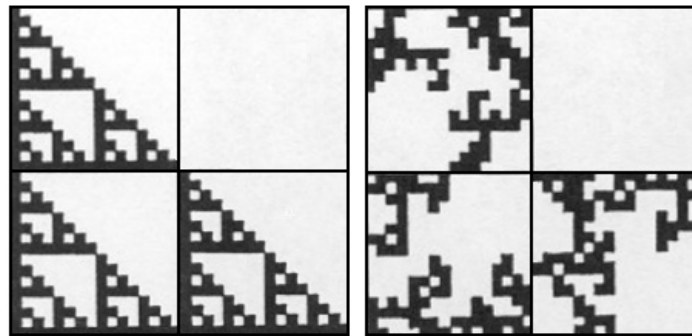
### **1. Giriş**

1950'li yılları izleyen süreçte bugün modern diye ifade edilen ancak bu çalışmada geleneksel olarak kabul edilen yerleşik finans teorisinin temelleri atılmıştır. Yine bu yılları takip eden dönemde Benoit Mandelbrot geleneksel finans teorisinin hemen her başlığına ağır eleştiriler yöneltilmiş, finansal modellemede fraktallık kavramına dikkat çekmiştir. 1960'larda New York'taki IBM araştırma merkezinde çalışırken pamuk fiyatları üzerinde yaptığı çalışma ile fraktallık kavramıyla tanışmamızı sağlayan Benoit Mandelbrot bugün "Fraktalların Babası" olarak kabul edilmektedir.

Fraktal yaklaşım finansal piyasalardaki kabullerin ve mevcut teorilerin önemli bir kısmının sorgulanmalarını gerektirmektedir. Bu yeni yaklaşım, geleneksel finans teorisinin boşluklarını fraktal yöntem ve teoriler ile doldurmaya çalışmaktadır. Fraktal teorisinin kurucusu olan Mandelbrot tarafından ilk eleştiri Fama'nın (1965) rassal yürüyüş teorisine yapılmış olup, finansal varlık getirilerinde rassal yürüyüş kabulünün aksine kısa dönemli değil uzun dönemli bellek söz konusu olduğu ifade

edilmiştir. İkinci büyük eleştiri geleneksel finans teorisinin hemen her modelinde kullanılan normal dağılım varsayımıdır. Bugün itibari ile bilinmektedir ki finansal zaman serileri normallikten uzak özellikler göstermektedir. Mandelbrot bu tespitten yola çıkarak 1960'lı yıllarda alfa-stable dağılımların kullanılmasını önermiştir. Bu dağılımlar kuyruk kalınlık özellikleri ile finansal verilere daha iyi uyum sağlamakta ve fraktal dağılımlar olarak ifade edilmektedirler. Mandelbrot'a (2004) göre geleneksel risk ölçüm yöntemleri riski olduğundan daha düşük göstermektedir. Riskin olduğundan daha düşük hesaplanmasının en önemli nedeni ise kullanılan normal dağılım varsayımıdır. Fraktal dağılımların güç yasası (power law) özelliği göstermeleri nedeni ile kuyruk kalınlıkları normal dağılımınkine oranla daha büyük olmakta ve kuyruklara (ekstrem olaylara) ayrılan olasılığın oranı artırılmış olmaktadır. Mandelbrot'un oluşturmuş olduğu fraktal finans teorisi sonrasında birçok yazar tarafından fraktallar finansal modellemenin içine dahil edilmiştir. Örneğin Peters (1994) Fraktal Piyasa Hipotezi ile Etkin Piyasa Hipotezine alternatif bir teori sunarak, fraktal özellikleri içinde barındıran bir hipotez ortaya koymuştur.

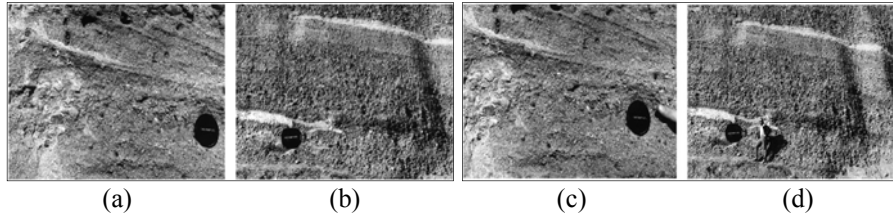
Fraktal kelimesi Latince'deki "*fractus*" kelimesinden gelmektedir. Genel olarak düzenli olmayan parçalara ayırmak anlamına geldiği söylenebilir. Bir fraktal, aynı yapı ve detayı tekrar eden model olarak tanımlanmaktadır. Herhangi bir fraktal parçası bizim onu tekrar ve tekrar büyüttüğümüz şekilde aynı görünür (Williams, 1995:198). Fraktallar genel olarak deterministik ve stokastik olmak üzere iki başlık altında incelenmektedir. Deterministik fraktallar bütün oran düzelerinde tamamen aynı gözükmetedirler. En azından teorik olarak boyut bakımından aralıkları limitsiz ya da sonsuzdur. Tüm ölçeklerde üst ve alt limitsiz olarak yayılırlar. Matematiksel ve teorik dünyada daha yaygındırlar. Literatürdeki popüler örnekleri ise Sierpinski Üçgeni, Von Koch Kartanesi, Cantor Tozu'dur (P. Williams, 1997:200). Stokastik (doğal) fraktallar ise deterministik olmayan kurallar ile üretilen fraktallardır. Deterministik ve stokastik fraktallar arasındaki fark aşağıdaki şekil üzerinden gösterilebilir. Deterministik fraktalın elde edilebilmesi için karenin sağ üst köşesindeki çeyreklik kısım kesilmektedir. Sonrasındaki aynı işlem kalan bütün karelerde aynı şekilde gerçekleştirilmektedir. Stokastik fraktalın elde edilebilmesi için ise bütündeki dört çeyreklik kareden hangisinin silineceğine rassal olarak karar verilmektedir. Ortaya çıkan şekiller tümüyle farklı olmasına karşın bu iki fraktalın boyutu aynıdır (Tel, 1988: 1159).



**Şekil 1. Deterministik (soldaki) ve Stokastik (sağdaki) Fraktallar (Tel, 1988)**

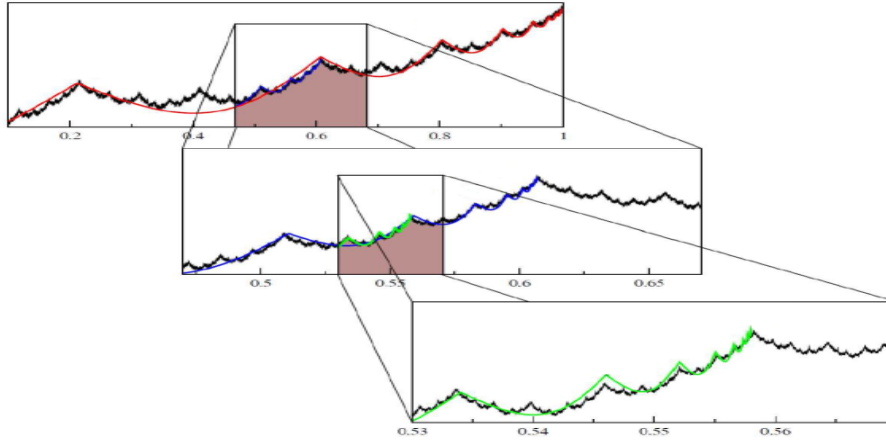
Pamuk fiyatı zaman serilerinin farklı zaman ölçeklerinde benzer olduğu amprik gözlemden hareketle Mandelbrot (1963) fraktal finans teorisinin oluşmasında çok önemli katkılar sağlamıştır (Focardi ve Fabozzi, 2004:231). Mandelbrot'un

çalışmaları sonrasında fraktallar; geometriden, astronomiye, tıbbı ve finansa kadar çok geniş bir alanda araştırma konusu olmuştur. Finansal piyasalara dair yapılmış olan çalışmalar finansal zaman serilerinin farklı zaman ölçeklerinde aynı görüntüyü verdiğini yani kendine benzerlik özelliği gösterdiğini ortaya koymuştur. Kendine benzerlik; uzun dönemli bellek ve fraktal boyut ile birlikte fraktallık kavramının tanımlayıcı parametrelerinden birisidir. Kendine bezerlik doğada olduğu gibi finansal zaman serilerinde de görülebilmektedir. Aşağıdaki Şekil 2 ve 3'te jeolojik yapılar ve finansal zaman serilerdeki kendine benzerlik özelliği görsel olarak sunulmuştur.



**Şekil 2. Jeolojik Yapılardaki Kendine Benzerlik Örneği** (Sornette, 2003)

Şekil 2'de, a ile c ve b ile d'deki resimler aynı olmakle birlikte; c'deki resimde bir parmak, d'de ise bir bilim adamı yer almaktadır. Bu resimler jeolojik yapıların kendine benzerliğine dair iyi bir örnektir. Soldaki lens kapağı gözlemciyi yanıltmaktadır (Sornette, 2003, 128). Şekil 3'te ise bir zaman serisinin belirli bir kesiti alınmakta ve bu işlem ikinci zaman serisi üzerinden tekrar yapılmaktadır. Elde edilen serilerin tamamı benzerlik göstermektedir.



**Şekil 3. Finansal Zaman Serilerinin Kendine Benzerliği** (Oswiecimkaa, 2010)

Kendine benzerlik özelliğinin yanı sıra, Mandelbrot sonrasında bir çok çalışma göstermiştir ki genel olarak finansal zaman serileri Etkin Piyasa Hipotezi'nin (EPH) varsaydığı gibi rassal yürüyüş sergilememekte ve fiyat değişimleri normal dağılım izlememektedir. Bu çalışmalarda bildirildiğine göre finansal zaman serilerinde uzun dönemli belleğe dair bulgular söz konusudur.

Uzun dönemli bellek ya da uzun dönemli bağımlılık özelliği bir serinin yüksek dereceli korelasyon yapısını tanımlamaktadır. Bir zaman serisinin uzun dönemli bellek özelliği göstermesi halinde çok uzak gözlemler arasında bile dirençli bir geçici bağımlılık söz konusu olacaktır. Bu tür seriler açık fakat periyodik olmayan döngüsel modeller göstereceklerdir. Uzun dönemli belleğin varlığı dağılımın birinci momentinde doğrusal olmayan bağımlılığa neden olacak ve böylece seri dinamiklerinde öngörülebilirlik potansiyeli yaratacaktır (Barkoulas ve Baum, 1997: 191). Uzun dönemli belleğe sahip bir zaman serisinin otokorelasyon fonksiyonu hiperbolik olarak azalmaktadır. Uzun dönemli belleğin tespit edilmesinde hem zaman hem de frekans bölgesi kullanılabilir. Zaman bölgesinin kullanılması halinde hiperbolik olarak azalan otokovaryans fonksiyonunun varlığı uzun dönemli belleği gösterirken, frekans bölgesi için düşük frekanslarda tayf yoğunluk fonksiyonunun (spectral density function) sonsuza yaklaşması uzun dönemli bellek işareti olarak kabul edilir.

*Tanım 1. (Zaman bölgesi için):*  $X(t)$  durağan bir süreç ve  $\lambda\tau$ ,  $\tau$  gecikmesindeki otokovaryans fonksiyonu ise bu durumda otokovaryans fonksiyonun asimptotik özelliği aşağıdaki gibi olacaktır.

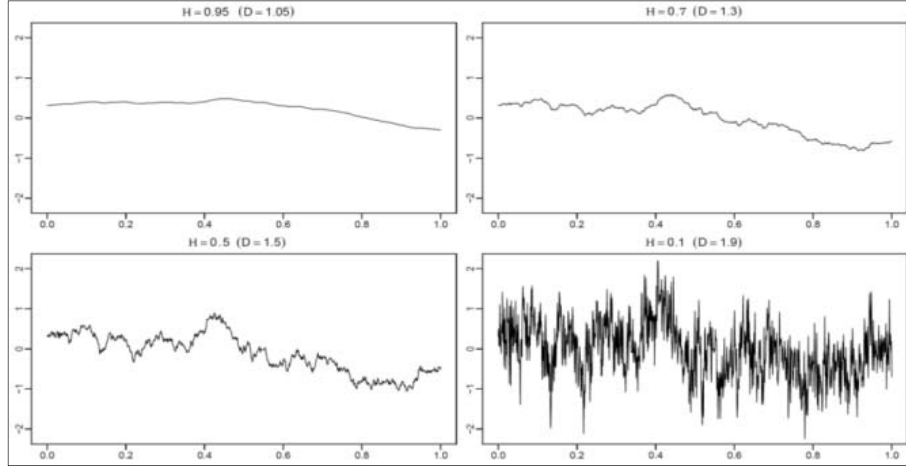
$$\lambda\tau \sim |\tau|^{2H-2} \quad \tau \rightarrow \infty \quad (1)$$

*Tanım 2. (Frekans bölgesi için):*  $f(\lambda)$  tayf yoğunluk fonksiyonu olması halinde,  $X(t)$  sürecini izleyen zaman serisi aşağıdaki durum için uzun dönemli belleği gösterecektir.

$$f(\lambda) \sim C_f |\lambda|^{1-2H} \quad \lambda \rightarrow 0 \quad (2)$$

burada  $C_f > 0$ 'dır ve hem Eşitlik 1, hem de Eşitlik 2'deki  $H$  değeri uzun dönemli bellek parametresi olan Hurst üsselidir (Kumar ve Maheswaran, 2012: 25).

Fraktal finans yaklaşımından farklı olarak, geleneksel finans teorisi hisse senedi fiyatlarının rassal olarak değiştiğini, kısa dönemli belleğe sahip olduğunu ve her fiyat değişiminin geçmişteki fiyatlardan bağımsız olarak gerçekleşen bir Brownian süreci izlediğini varsaymaktadır (Foo, 2009). Diğer taraftan rassal yürüyüşün kabulü altında oluşturulan Etkin Piyasa Hipotezi'ne (EPH) göre finansal zaman serilerinin sahip olması gereken boyut değeri 1,5 olmalıdır. Ancak Mandelbrot (1983) ve sonrasında yapılan çalışmalar bu boyutun 1 ve 1,5 aralığında değişebildiği yani fraktal bir özellik gösterebildiğini ortaya koymuştur. Fraktal boyut bir fraktalın pürüzlülük, kırıklık ve düzensizliğinin derecesinin sayısal bir ölçüsünü vermekte ve doğrusal olmayan sistemlerin karmaşıklık derecesinin tanımlanmasında önemli bilgiler sunmaktadır. Eğer ki fraktal boyut 1 ve 1,5 arasında ise getiri eğrisi düz bir çizgiden çok daha eğrili, rassal yürüyüşten ise daha düzdür. Fraktal boyutun 1,5-2 arasında olmasının anlamı ise zaman serisinin rassal yürüyüşten de daha pürüzlü olduğudur (Bo ve Zhongyong, 2007:282). Kendine benzer bir süreç için fraktal boyut uzun dönemli bellek ile ilişkilidir ve bu ilişki  $D + H = 2$  şeklinde yazılabilir.



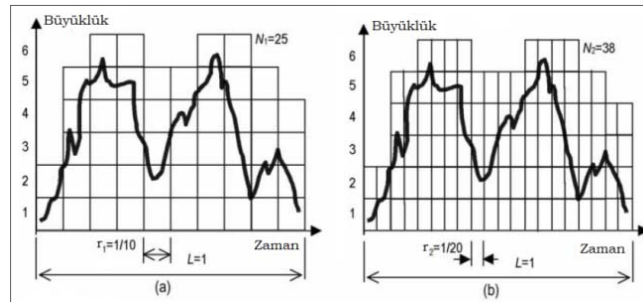
Şekil 4. Hurst Üsseli ve Fraktal Boyut İlişkisi (Gneiting vd., 2012)

Bununla birlikte, Kristoufek ve Vosvrda'nın (2013:473) ifade ettiği üzere  $D$  ve  $H$  seri dinamiklerinin farklı görüntülerini sunduğu için bu ilişki finansal zaman serilerinde genellikle mükemmellik sağlanamaz. Genel olarak denilebilir ki,

- $D < 1,5$  için seri daha az pürüzlü olup trende sahiptir.
- $D = 1,5$  durumunda trend sözkonusu olmayıp serideki hareketler rassaldır.
- $D > 1,5$  durumunda ise trend olmayıp daha pürüzlü bir seri sözkonusudur.

Hurst üsseli olan  $H$ 'nin sıfıra yakın olan değerleri için seri çok daha pürüzlü olacaktır.

Fraktal boyutun hesaplanmasında farklı yöntemler olmakla birlikte, Kutu Sayım yöntemi üzerinden süreci basit bir şekilde açıklayabiliriz. Kutu Sayım yönteminde ilk olarak incelenen grafikler aşağıda olduğu gibi ızgaralanırlar. Zaman uzunluğu  $L = 1$ , kutu büyüklüğünün  $r_1 = 1/10$  olması halinde (a) grafiğindeki dolu kutu sayısı  $N_1 = 25$  olacaktır.  $\log(25)/\log(10)$  işleminden (a) grafiği için kutu boyutu  $D_1(r) = 1,398$  olarak bulunacaktır. (b) grafiğinde görüldüğü üzere  $r_2 = 1/20$  gibi daha küçük kutular için dolu olan kutu sayısı 38 olmakta ve böylece  $\log(38)/\log(20)$  işleminden kutu boyutu  $D_2(r) = 1,214$  olarak bulunmaktadır. Bulunan bu  $\log(r)$  ve  $\log(N)$  değerlerinin regresyona tabi tutulması halinde elde edilen eşitliğin eğimi kutu sayım yöntemine göre fraktal boyutu ( $D_H$ ) verecektir (Reljin ve Reljin, 2002: 283).



Şekil 5. Kutu Sayım Yöntemi Örneği (Reljin ve Reljin, 2002).

## 2. Literatür Taraması

Mandelbrot'un (1972) Hurst'un (1951) Dönüştürülmüş Genişlik (Rescaled Range,  $R/S$ ) istatistiğini finansal verilere uygulamasından bu yana kendine benzerlik ve uzun dönemli bellek finans literatürünün bir parçası haline gelmiştir.

Mandelbrot'un çalışmaları ile birlikte bir çok araştırmacı uzun dönemli bellek analizlerine ilgi göstermiştir. İlk çalışmalarda genel olarak parametrik olmayan yöntemler kullanılmıştır. Örneğin Greene ve Fielitz (1977)  $R/S$  analizi kullanarak uzun dönemli belleği test etmiş, aynı zamanda hisse senedi getirilerinin normal dağılmadığını, durağan Pareto dağılımı özelliği gösterdiğini ifade etmişlerdir. Lo (1991) ise klasik  $R/S$  analizinin uzun ve kısa dönemli belleği ayırt etmede başarısız olduğunu öne sürerek modifiye edilmiş  $R/S$  analizini geliştirmiştir. Hiemstra ve Jones (1997) Lo'nun (1991) modifiye edilmiş  $R/S$  analizi ile 1952 adet hisse senedi üzerinde araştırma yapmış ve hisselerin bir kısmında uzun dönemli belleğe dair işaretler olduğunu göstermiştir. Benzer şekilde Cavalcante ve Assaf (2002) modifiye edilmiş  $R/S$  analizi ile elde ettiği sonuçlarda Brezilya hisse senedi piyasasının getirilerinde düşük oranda uzun dönemli bellek işaretleri tespit etmiştir. Buna karşın Willinger ve diğerleri (1999) modifiye edilmiş  $R/S$  analizinin metodolojisinin uzun dönemli bellek olmadığını ifade eden  $H_0$  hipotezini kabul etmeye eğilimli olduğunu göstermişlerdir. Bu bilgi dahilinde Tsuji (2003) çalışmasında parametrik yöntemler ile birlikte hem modifiye edilmiş  $R/S$  hem de klasik  $R/S$  testini kullanmıştır. Giraitis ve diğerleri (2003) ise uzun dönemli belleğin testi için dönüştürülmüş varyans (rescaled variance) testi isimli yeni bir model önermişlerdir. Peng ve diğerleri (1994) ise  $R/S$  analizi gibi Hurst üsselini tahmin eden yeni bir model geliştirmiştir. Bir çok çalışmada, Eğilimden Arındırılmış Dalgalanma analizi isimli bu modelin klasik  $R/S$  analizine karşı üstünlüğü ortaya konmuştur. Kim ve diğerleri (2014), Weron (2002) ve Rege ve Martin (2011) bu çalışmalara örnek olarak gösterilebilir.

Parametrik olmayan testlerin yanı sıra literatürde yarıparametrik ve parametrik yöntemlere karşı da büyük ilgi söz konusudur. Geweke ve Porter-Hudak'ın (1983) geliştirdiği GPH, Granger ve Joyeux (1980) ile Hosking'in (1981) çalışmaları ile ortaya çıkan ARFIMA ve Baillie ve diğerleri (1996) tarafından sunulan FIGARCH modelleri sonrasında bir çok çalışmada bu yöntemler kullanılmış ve bu yöntemlerin modifiye edilmiş versiyonları yaratılmıştır. Örneğin Smith (2005) yapısal kırılmaları dikkate alan modifiye edilmiş GPH metodunu geliştirerek klasik GPH yöntemine bir alternatif sunmuştur.

Uzun dönemli bellek çalışmalarının yanı sıra Mandelbrot (1983) Öklid doğrusu ile bir Öklid düzlemi arasında kesirli değerler alabilen ve fraktal boyut olarak isimlendirilen yeni bir boyut tanımlaması yapmıştır. Bugün fraktal boyut analizleri, finansal piyasalar dahil olmak üzere tıp, astronomi, jeoloji gibi çok farklı alanlarda kullanılmaktadır. Bayraktar ve diğerleri (2005), Kristoufek ve Vosvrda (2013) ile Gayathri ve diğerleri (2013) finansal piyasalardaki fraktal boyutun ölçümüne dair çalışmalara örnek olarak gösterilebilir.

## 3. Ekonometrik Teori

### 3.1. Dönüştürülmüş Genişlik Analizi (R/S)

Dönüştürülmüş Genişlik analizinin gerçekleştirilmesindeki süreci Lo'nun (1991: 1287) açıklaması ile şu şekilde ifade edebiliriz:  $r_1, r_2, \dots, r_n$  örneklem getirilerini ve

$\bar{r}_n$  örneklem ortalamasını göstermek üzere  $R/S$  istatistiği aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$(R/S)_n = \frac{1}{\sigma_n} [\text{Max}_{1 \leq k \leq n} \sum_{j=1}^k (r_j - \bar{r}_n) - \text{Min}_{1 \leq k \leq n} \sum_{j=1}^k (r_j - \bar{r}_n)] \quad (3)$$

Eşitlikteki ilk terim,  $r_j$ 'nin örneklem ortalamasından sapmaların kısmi toplamları için maksimumdur.  $r_j$ 'lerin ortalamalarından bütün sapmalarının toplamı sıfır olmasından dolayı bu maksimum her zaman pozitifdir. İkinci terim ise kısmi toplamların aynı dizisinin  $k$ 'sı üzerinde minimum olup her zaman negatif değerlidir. Dolayısıyla genişlik olarak isimlendirilen iki sayı arasındaki bu fark her zaman pozitifdir. Eşitlikteki  $\sigma_n$  standart sapmanın maksimum likelihood tahmincisidir.

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X}_n)^2} \quad (4)$$

Parametrik olmayan bu yöntemde çalışılan serinin normal dağılım göstermesi şartı aranmaz. Nitekim Mandelbrot ve Wallis (1969a) yüksek çarpıklık ve basıklık değerine sahip olan seriler için Monte-Carlo simülasyonu ile  $R/S$  analizinin güvenilirliğini göstermişlerdir.

### 3.2. Eğilimden Arındırılmış Dalgalanma Analizi (DFA)

Kantelhardt ve diğerlerinin (2001:443) ifade ettiği üzere DFA analizi dört adımda açıklanabilir: İlk olarak günlük getirilerden oluşan  $r(t)$  zaman serisinin ( $r_1, r_2, \dots, r_T$ ) kümülatif toplamı elde edilecektir.

$$Y(t) = \sum_{k=1}^T r_k \quad (5)$$

İkinci olarak  $Y(t)$ 'den  $N_s \equiv \left(\frac{N}{s}\right)$  şeklinde  $s$  uzunluğunda birbiriyle kesişmeyen alt gruplar elde edilecektir. Üçüncü adımda her bir  $v$  grubu için En Küçük Kareler (EKK) yöntemi ile lokal trendler hesaplanır. Sonrasında grup uzunluğu olan  $s$  boyunca eğilimden arındırılmış zaman serileri ( $Y_s(t)$ ) hesaplanır. Aslında buradan elde edilen  $Y_s(t)$  serisi orjinal seri ile EKK tahmini arasındaki farktır ve aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$Y_s(t) = Y(t) - p_v(t) \quad (6)$$

Dördüncü adımda her bir  $2N_s$  grubu için varyans hesaplanacaktır:

$$F_s^2(v) = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s Y_s^2[(v-1)s + i] \quad (7)$$

Son aşamada tüm grupların ortalaması alınır ve sonrasında DFA dalgalanma fonksiyonunun hesaplanması için karekök elde edilir.

$$F(s) = \sqrt{\frac{1}{2N_s} \sum_{v=1}^{2N_s} F_s^2(v)} \quad (8)$$

Farklı eğilim dereceleri ( $n$ ) için farklı dalgalanma fonksiyonları ( $F^n(s)$ ) elde edilecektir. Dalgalanma fonksiyonları bir güç yasası ile artış göstermektedir ve bu ilişki aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$F^n(s) \sim s^H \quad (9)$$

$F^n(s)$ 'nin  $s$ 'nin fonksiyonu olarak log-log grafiğinin çizilmesi halinde elde edilen doğrunun eğimi Hurst üsseli olan  $H$ 'yi verecektir.

### 3.3. Smith'in Modifiye Edilmiş GPH Analizi

Smith (2005) yapısal kırılmaların sahte uzun dönemli bellek üretebileceğini öne sürerek Gewek ve Porter-Hudak'ın (1983) klasik GPH modelini modifiye etmiştir. Klasik GPH modeli için kesirli bütünleşme katsayısı aşağıdaki gibi tahmin edilmektedir.

$$\hat{d} = d_* + \frac{\sum_{j=1}^J (x_j - \bar{x}) \log(\hat{f}_j / f_j)}{\sum_{j=1}^J (x_j - \bar{x})^2} \quad (10)$$

burada  $d_* \equiv \frac{\sum_{j=1}^J (x_j - \bar{x}) \log(f_j)}{\sum_{j=1}^J (x_j - \bar{x})^2}$ . Smith (2005) klasik modele  $-\log(p^2 + w^2)$  şeklinde bir regresör eklenmesini önermiştir. Modifiye modelin regresyon denklemi aşağıdaki gibidir.

$$\log \hat{f}_j = \alpha + dX_j + \beta Z_{jk} + \hat{u}_j \quad (11)$$

Burada  $k > 0$ ,  $p_T = \frac{kJ}{T}$  ve  $Z_{kj} = -\log \left[ \frac{(kJ)^2}{T^2} + w_j^2 \right]$ 'dir. Modifiye modeldeki  $d$  tahmincisi ise

$$\hat{d}^k = d_*^k + (\tilde{X}' M_Z \tilde{X})^{-1} \tilde{X}' M_Z \log \left( \frac{\hat{f}}{f} \right) \quad (12)$$

şeklinde dir. Eşitlik 12'de,  $\tilde{X} \equiv X - \bar{X}$ ,  $M_Z = I - \tilde{Z}_k (\tilde{Z}_k' \tilde{Z}_k)^{-1} \tilde{Z}_k'$ ,  $\tilde{Z}_k \equiv Z_k - \bar{Z}_k$ ,  $\bar{X} = J^{-1} \sum_{j=1}^J X_j$ ,  $\bar{Z}_k = J^{-1} \sum_{j=1}^J Z_{kj}$ 'dir.

### 3.4. Fraktal Boyut Analizi

*Kutu Sayım Yöntemi:* Fraktal boyut hesaplamasında farklı yaklaşımlar olmakla birlikte bu çalışmada en popüler yöntem olan Kutu Sayım yöntemi ile birlikte Yarı-Periyodogram yöntemi kullanılacaktır. Kutu sayım yöntemine dayanan fraktal boyut hesaplamasındaki süreç şu şekilde açıklanabilir: Elimizde bir  $S$  kümesi olsun. Bu kümenin  $\varepsilon$  kenar uzunluğuna sahip karelerden oluşan bir grid üzerinde olduğunu varsayalım. Elimizdeki kümenin kaç adet kare ile kaplandığını  $N(\varepsilon)$  ile gösterirsek kutu sayım boyutu aşağıdaki gibi formülize edilebilir (Kotowski ve diğerleri, 2008:419).

$$D_{BC} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log \left( \frac{1}{\varepsilon} \right)} \quad (13)$$

Farklı  $\varepsilon$  değerleri kullanılarak elde edilen  $\log N(\varepsilon)$  değerleri ile  $\log \frac{1}{\varepsilon}$  regresyona sokulduğunda elde edilen doğrunun eğimi Kutu Sayım boyutunun değerini ( $D_{BC}$ ) verecektir.

*Yarı-Periyodogram Yöntemi:* Aşağıdaki durağan bir gauss süreci için  $J(\omega) = B(\omega)^2$  yarı-periyodogram olarak adlandırılır.



$$B(\omega) = 2 \int_0^1 X_t \cos(\omega[2t - 1])dt \quad (14)$$

Fraktal boyutun yarı-periyodoram tahmincisi ise aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$D_p = 2,5 + 0,5 \left[ \sum_{l=1}^L (s_l - \bar{s}) \log \hat{f}(\omega_l) \right] \left[ \sum_{l=1}^L (s_l - \bar{s})^2 \right]^{-1} \quad (15)$$

burada  $\omega_l = 2\pi l$ ,  $s_l = \log \omega_l$  olup  $\bar{s}$ ,  $s_1, \dots, s_L$  serisinin ortalamasıdır (Gneiting ve diğerleri, 2012: 260).

#### 4. Ekonometrik Analiz

##### 4.1. Dönüştürülmüş Genişlik Analizi (R/S)

Dönüştürülmüş Genişlik ( $R/S$ ) Analizi yöntemi parametrik olmayan bir yöntem olup, Hurst üsselini ( $H$ ) tahmin etmektedir.  $R/S$  analizinde, uzun dönemli belleğin varlığı ya da yokluğunu tespit edebilmek için kullanılan referans aralıklar şu şekildedir: 0 ile 0,5 arasındaki  $H$ , ortalamaya dönüşlü süreci ifade ederken, 0,5 ile 1 arasındaki  $H$  uzun dönemli belleğin varlığını göstermektedir.  $H = 0,5$  durumunda ise rassal yürüyüş sözkonusudur (Hurst, 1951).

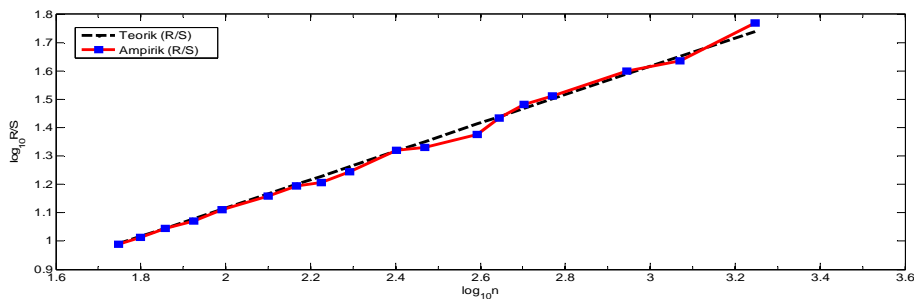
Aşağıdaki sonuçlardan görüldüğü üzere BİST100 endeks getirileri için elde edilen  $H$  değeri 0,5-1 aralığında gözükmeyle birlikte, 0,4100-0,5853 şeklindeki %95 güven aralığı için bu değer  $H_0$  hipotezinin kabulünü gerektirmektedir. Yani getiri serisinde uzun dönemli bellek söz konusu değildir. 0,2069 olarak tahmin edilen işlem hacmi serisi  $H$  değeri ise çok daha net bir şekilde uzun dönemli belleğin olmadığını göstermekte olup ortalamaya dönüşlü sürece işaret etmektedir.

**Tablo 1. R/S Analizi Sonuçları**

	Hurst Üsseli (H)	Güven Aralıkları <sup>a</sup>
BİST100 Getiri	0,5104*	0,4100 - 0,5853
BİST100 İşlem Hacmi	0,2069*	0,4100 - 0,5853

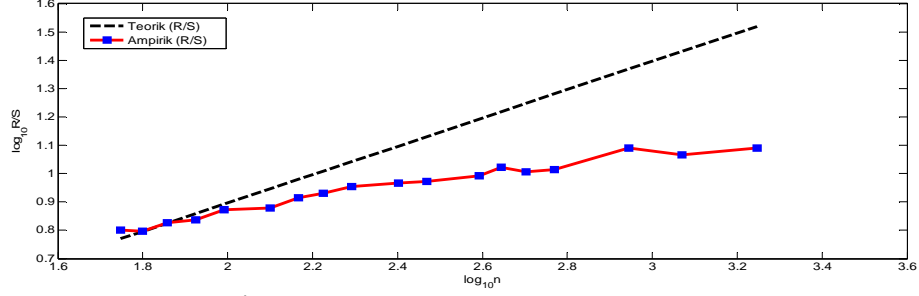
\* %95 güven aralığındaki anlamlılığı göstermektedir. <sup>a</sup> Hurst üsselinin % 95 güven aralığı değerleri Weron'dan (2002) temin edilmiştir.

Aşağıdaki Şekil 6 ve 7, Tablo 1'den elde edilen sonuçları destekler bilgi sunmaktadır. Teorik ve ampirik hurst üsselinin eğimini elde ettiğimiz doğru ve eğriden görüldüğü üzere her iki grafik kısmi olarak birbirine yakın gözükmektedir.



**Şekil 6. BİST100 Getirilerinin Ampirik ve Teorik R/S log-log Grafiği**

İşlem hacmi serisinde ise  $\log_{10} n = 2$  için ampirik  $R/S$  için elde edilen eğri teorik  $R/S$  doğrusundan ciddi şekilde ıraksamaya başlamaktadır.



**Şekil 7. BIST100 İşlem Hacmi Getirilerinin Ampirik ve Teorik R/S log-log Grafiği**

#### 4.2. Eğilimden Arındırılmış Dalgalanma Analizi (DFA)

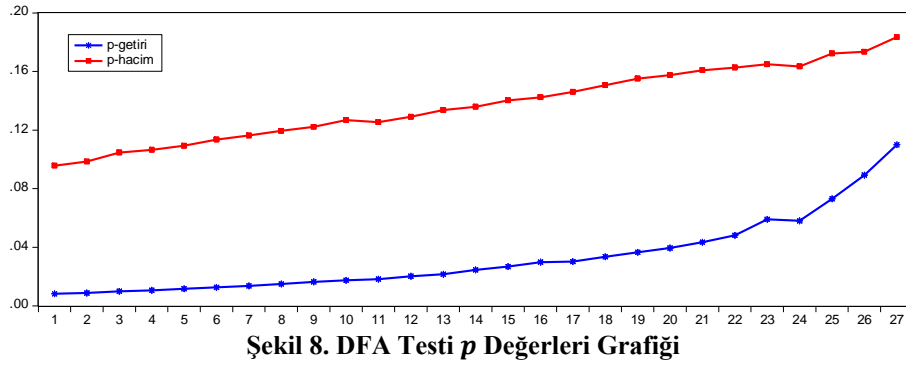
$R/S$  analizine benzer şekilde DFA yöntemi de Hurst üsseli olan  $H$ 'yi hesaplamaktadır. Elde edilen sonuçların yorumlanmasında kullanılan referans aralıklar da  $R/S$  analizindekilerle aynıdır. Her iki seri için DFA yönteminden elde edilen sonuçlar önceki sonuçları destekler niteliktedir. Güven aralığı değerleri dikkate alındığında her iki seri için de uzun dönemli belleğin olmadığı görülmektedir.

**Tablo 2. DFA Test Sonuçları**

	BİST100 Getiri	BİST100 İşlem Hacmi
Hurst Üsseli (H)	0,5148*	0,1301*
Güven Aralığı	0,4177-0,5679	0,4177-0,5679
$p$ sonuçları	0,0082	0,0957
	0,0088	0,0985
	0,0100	0,1047
	0,0106	0,1065
	0,0116	0,1093
	0,0126	0,1135
	0,0136	0,1163
	0,0149	0,1194
	0,0164	0,1222
	0,0175	0,1268
	0,0183	0,1254
	0,0202	0,1290
	0,0216	0,1336
	0,0246	0,1359
	0,0268	0,1402
	0,0299	0,1423
	0,0303	0,1461
	0,0335	0,1507
	0,0366	0,1552
	0,0395	0,1575
	0,0434	0,1608
	0,0482	0,1627
	0,0591	0,1649
	0,0580	0,1634
	0,0730	0,1722
	0,0893	0,1735
	0,1100	0,1835

\* %95 güven aralığındaki anlamlılığı göstermektedir.

Hurst üsselinin yanısıra Tablo 2’de  $p$  sonuçları da sunulmuştur.  $p$  değerleri tüm bölenler ( $ds$ ) için eğilimden arındırılmış yürüyüşün ortalama standart sapmalarının vektörüdür. Hurst üsseli bölenlere ( $ds$ ) karşı  $p$  değerleri ile çizilen log-log grafiğinin eğimidir. Aşağıdaki grafik üzerinde her iki seri için elde edilen  $p$  değerlerinin izlediği yol görülebilmektedir.



Şekil 8. DFA Testi  $p$  Değerleri Grafiği

#### 4.3. Smith’in Modifiye Edilmiş GPH Analizi

Yapısal kırılmalar ile serilerin ortalama ve varyanslarında değişimler oluşmakta ve bu değişiklikler uzun dönemli bellek analizi sonuçlarını etkileyebilmektedir. Mikosch and Starica’nın (1999) ifade ettiği üzere yapısal kırılmalar sahte uzun dönemli bellek etkisi yaratabilmektedir. Her ne kadar  $R/S$  ve DFA analizi her iki seri için uzun dönemli belleğin olmadığını gösterse de çalışmanın bu kısmında Smith’in (2005) modifiye GPH tahminleri üzerinden önceki sonuçların tutarlılığı test edilecektir. Yarı parametrik bir yöntem olan Smith’in modifiye GPH testi önceki iki testten farklı olarak Hurst üsselini değil, kesirli bütünleşme parametresi olan  $d$  değerini hesaplamaktadır. Aslında  $d$  ile  $H$  arasında açık bir ilişki söz konusudur. Bu ilişki  $d = H - 0,5$  şeklinde ifade edilebilir.

Bu analizden elde edilecek sonuçların yorumlanmasında kullanılan  $d$  değeri için referans aralıklar Barkoulas ve diğerleri (1998:3) tarafından açıklanmıştır. Uzun dönemli belleği var olması halinde  $d$ , 0 ve 0,5 arasında yer alacaktır. Bu durum dışında,  $d = 0$  olması halinde kısa dönemli bellek söz konusudur. 0,5 ile 1 arasındaki  $d$  değeri ise serinin ortalamaya dönüşlü olduğunu, -0,5 ve 0 aralığı serinin uzun dönemli negatif bağımlılık gösterdiğini ifade etmektedir.

Smith (2005) klasik GPH modeline alternatif olarak geliştirdiği modelinde farklı  $k$  düzeylerinde  $J$ ’nin Plug-in ve sabit olmak üzere iki şekilde modellendiği testlerin sınanması gerektiğini ifade etmiştir. Burada  $k$ , 1 ve 5 arasındaki basamak olup;  $J$ ,  $d$  tahminlerindeki periyodogram sayısıdır. Smith’in sonuçların değerlendirilmesi noktasında tavsiye ettiği  $k$  değeri 3’tür. Modifiye edilmiş GPH analizinden elde edilen sonuçlar aşağıdaki Tablo 3 ve 4’te sunulmuştur.

**Tablo 3. Smith'in Modifiye GPH Test Sonuçları**

		GPH	Modified GPH				
			$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
BİST100 Getiri	$J'nin$	-0,0428	-0,1938	-0,1681	-0,1472	-0,0950	-0,04352
	<i>Plug-in seçimi</i>	(0,0760) [-0,563]	(0,2051) [-0,944]	(0,146) [-1,151]	(0,1218) [-1,208]	(0,1072) [-0,886]	(0,09717) [-0,447]
	$J = \sqrt{T}$	-0,1041 (0,093) [-1,113]	0,2497 (0,2999) [0,8325]	0,157 (0,2211) [0,7101]	0,1222 (0,1939) [0,6302]	0,1039 (0,1804) [0,576]	0,09274 (0,1726) [0,5375]

(.) Parantez içindeki değerler standart hataları, [.] köşeli parantez için deki değerler t istatistiklerini göstermektedir.

**Tablo 4. Smith'in Modifiye GPH Test Sonuçları**

		GPH	Modified GPH				
			$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
BİST100 İşlem Hacmi	$J'nin$	-0,3382	-0,3598	-0,3633	-0,3466	-0,3076	-0,3209
	<i>Plug-in seçimi</i>	0,07982 [-4,237]	(0,2179) [-1,651]	(0,1543) [-2,355]	(0,1283) [-2,701]	(0,113) [-2,723]	(0,1022) [-3,139]
	$J = \sqrt{T}$	-0,4659 0,09359 [-4,978]	-0,0578 (0,2999) [-0,192]	-0,2169 (0,2211) [-0,981]	-0,2758 (0,1939) [-1,422]	-0,3059 (0,1804) [-1,696]	-0,3236 (0,1726) [-1,875]

(.) Parantez içindeki değerler standart hataları, [.] köşeli parantez için deki değerler t istatistiklerini göstermektedir.

$k = 3$  için elde edilen  $t$  istatistiklerini dikkate aldığımızda görülmektedir ki getiri serisi için hem plug-in seçimi hem de sabit  $J$  analizlerinde uzun dönemli belleğin olmadığını ifade eden  $H_0$  hipotezi kabul edilmektedir. Hacim serisinde ise plug-in yöntemi orta düzeyde bir belleğe işaret ederken, sabit  $J$  analizi %95 güven aralığında  $H_0$  hipotezinin kabulüne işaret etmektedir. Genel olarak değerlendirildiğinde denilebilir ki yapısal kırılmalar da dikkate alındığında her iki seri için %95 güven aralığında uzun dönemli bellek söz konusu değildir.

#### 4.4. Fraktal Boyut Analizi

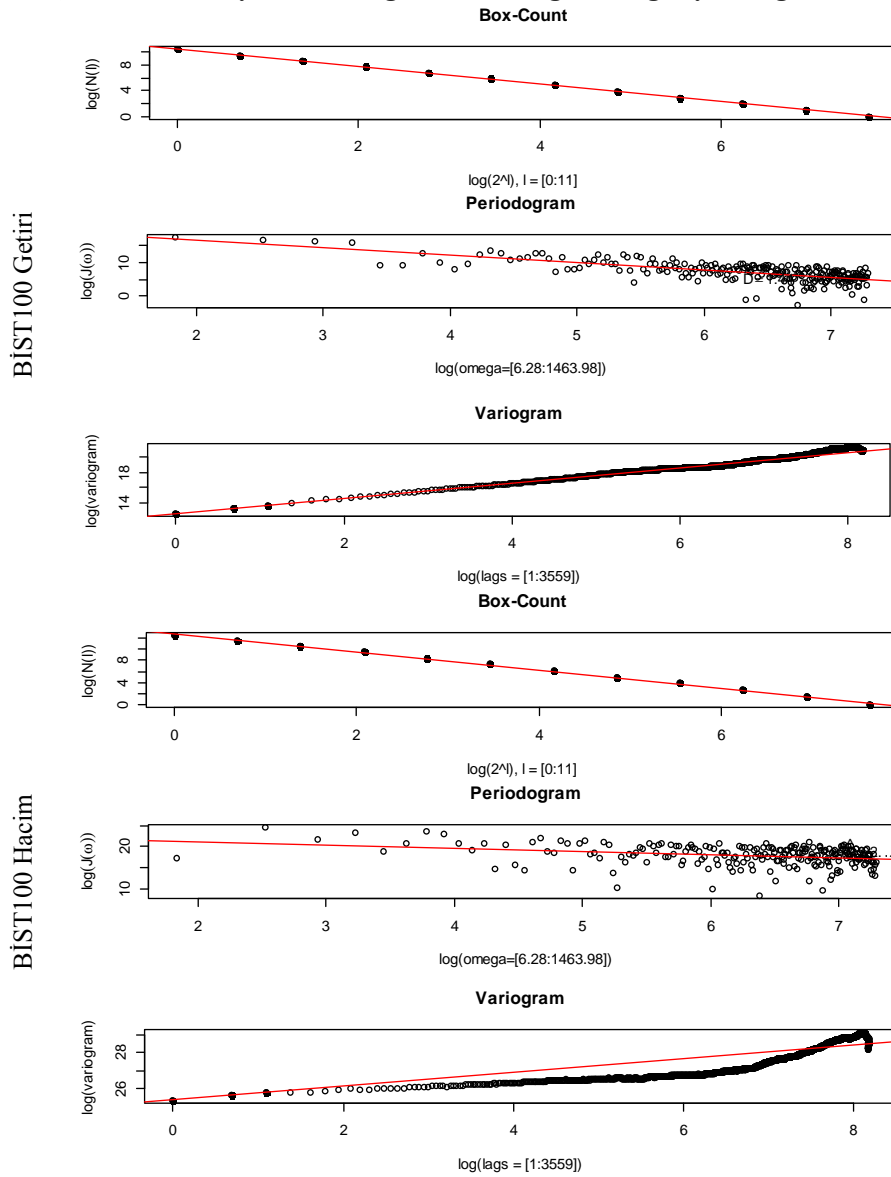
Daha önce belirtildiği üzere fraktallığın parametreleri uzun dönemli bellek, kendine benzerlik ve fraktal boyut şeklinde özetlenebilmektedir. Çalışmanın bu kısmında Kutu Sayım ve Yarı-Periyodogram yöntemleri ile fraktal boyut tahminleri yapılacaktır. Kristoufek ve Vosvrda'nın (2013:473) belirttiği üzere kendine benzer bir süreç için fraktal boyut uzun dönemli bellek ile ilişkilidir. Bu ilişki şu şekilde yazılabilir:  $D + H = 2$ . Finansal zaman serilerinde bu ilişki tam olarak sağlanamamakla birlikte genel olarak denilebilir ki  $D < 1,5$  için seri daha az pürüzlü olup trende sahip gibi gözükür.  $D = 1,5$  durumunda trend söz konusu olmayıp serideki hareketler rassaldır.  $D > 1,5$  olması halinde ise bellek olmayıp daha pürüzlü bir seri söz konusudur.

**Tablo 5. Fraktal Boyut Test Sonuçları**

	BİST100 Fiyat	BİST100 İşlem Hacmi
Kutu Sayım	1,36	1,63
Yarı-Periyodogram	1,44	2,12
Variogram	1,50	1,81

Yukarıdaki Tablo 5'ten elde edilen sonuçlar göstermektedir ki BIST100 endeksinin hacim serisi için her üç yöntem ile elde edilen  $D$  değeri 1,5 referans değerinden büyüktür. Bunun anlamı serinin oldukça pürüzlü bir yapıya sahip olup, uzun dönemli bellek özelliği göstermemesidir. BIST100 fiyat serisi için Kutu-Sayım yönteminden elde edilen değer ise uzun dönemli belleğe dair işaretler sunarken Variogram yöntemi rassallığı yani kısa dönemli belleği göstermektedir. Yarı-Periyodoram yöntemi de rassallığa yakın bir değere sahiptir. Hergarten'in (2002) Kutu-Sayım yöntemi için yapmış olduğu uyarı dikkate alındığında elde edilen 1,36 değerine şüpheli yaklaşılmaktadır. Bu şartlar altında diğer iki yöntemin gösterdiği şekilde BIST100 fiyat serisinde kısa dönemli bellek olduğu ifade edilebilir.

**Şekil 9. Kutu Sayım, Periodogram ve Variogram Regresyon Doğruları**



Yukarıdaki iki grafik her iki fraktal boyut hesaplama yönteminde kullanılan regresyon doğrularını ve elde edilen eğim değerlerini göstermektedir.

## 5. Sonuç

Fraktal özelliklerin varlığı halinde geleneksel finans teorisine dayanan birçok model ve teorisinin geçerliliği sorgulanabilir olacaktır. Örneğin kısa dönemli bellekli modeller olarak bilinen GARCH sınıfı ile yapılan risk modellemesi ve hesaplamaları güvenilir olmayan sonuçlar verecektir. Logaritmik hisse senedi getirilerinin normal dağıldığını ve hisse senedi fiyat gelişiminin geometrik Brownian hareketi ile gerçekleştiğini kabul eden Black-Scholes opsiyon fiyatlama modelinin de sonuçları güvenilir olmayacaktır. Aynı şekilde, uzun dönemli belleği ve yatırımcı ufkunu dikkate almayan CAPM ve onun risk ölçüsü olan Beta'da kullanışsız olacaktır. Bahsedilen bu modeller geleneksel finans teorisinin temel modelleri olup, buralarda ortaya çıkan sorgulamalar alınan finansal kararlar üzerinden herbirimizin yaşamına kadar uzanacaktır. Dolayısı ile fraktallık alanında yapılan çalışmalar geleneksel finans teorisinin sorgulanmasına dair önem arz etmektedir. Kendine benzerlik, uzun dönemli bellek ve fraktal boyut fraktallık kavramının önemli parametreleri olup, bu özelliklerin herhangi bir zaman serisi için tespit edilmesi o zaman serisinin fraktallığı hakkında bilgi vermektedir. Bu bilgiden hareketle bu çalışmada, Dönüştürülmüş Genişlik Analizi (R/S), Eğilimden Arındırılmış Dalgalanma Analizi (DFA), Smith'in modifiye edilmiş GPH analizi ve fraktal boyut hesaplama yöntemleri olan Kutu-Sayım, Yarı-Periyodogram ve Variogram uygulamaları üzerinden BİST100 endeks getirilerinin ve işlem hacminin fraktallığı analiz edilmiştir. R/S, DFA ve modifiye GPH analizleri logaritmik getiriler üzerinden yapılmış, fraktal boyut hesaplamaları ise fiyat serisi üzerinden gerçekleştirilmiştir. Böylece iki yönlü bir sonuç elde edilmek istenmiştir. Elde edilen bulgulara göre, BİST100 endeksinin hem getirilerinde hem de işlem hacminde incelenen dönem itibari ile fraktallık özelliklerine rastlanılmamıştır. Kullanılan her iki seri için de genel olarak bellek özellikleri kısa dönemli olarak tespit edilmiştir. Hem R/S, hem de DFA ve modifiye GPH yöntemlerinin sonuçları birbiri ile tutarlı olup her iki seride de uzun dönemli belleğin olmadığı ortaya konmuştur. Fraktal boyut hesaplamalarından gelen bilgilere göre ise işlem hacmi serisinde fraktallık özellikleri görülebilmiştir; endeks fiyat serisindeki sonuçlar bir miktar farklılık göstermiştir. Variogram yöntemi tam olarak rassallığa (kısa dönemli bellek) işaret etmiş, yarı-periyodogram yöntemi ise rassallığa yakın bir değer vermiştir. Kutu-Sayım yöntemi ise serinin fraktal özellik gösterdiğine dair işaretler sunmuştur. Ancak Hergarten'in (2002) Kutu-Sayım yöntemine dair uyarısı ve diğer modellerden gelen sonuçlar dikkate alındığında incelenen dönem itibari ile hem BİST100 endeksinde hem de işlem hacminde fraktal özellikler olmadığı sonucuna varılmıştır.

## 6. Referanslar

- BAILLIE, R.T., BOLLERSLEV, T., MIKKELSEN, H.O. (1996). Fractionally integrated generalized autoregressive conditional heteroscedasticity. *Journal of Econometrics*, 74, 3-30. ss.
- BARKOULAS, J.T., BAUM, C.F. (1997). Long memory and forecasting in euroyen deposit rates. *Financial Engineering and the Japanese Markets*, 4 (3), 189-201. ss.
- BARKOULAS, J.T., BAUM, C.F., ÇAĞLAYAN, M. (1998). Fractional monetary dynamics. *Boston College Working Papers in Economics*, 321, 1-21. ss.

- BAYRAKTAR, E., POOR, H.V., SIRCAR, K.R. (2004). Estimating the fractal dimension of the S&P 500 index using wavelet analysis. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 7(5), 613-643.ss.
- BO, C., ZHONGYONG, Y. (2007). On the fractal analysis of listed military industry capital market. *International Conference on Management Science and Engineering, Finance Analysis*, 281-288. ss.
- CAVALCANTE, J., ASSAF, A. (2002). *Long range dependence in the returns and volatility of the Brazilian stock market*. Working Paper, Banco Nacional do Desenvolvimento, Rio de Janeiro.
- FAMA, E. (1965). Random walks in stock market prices. *Financial Analysis Journal*, 76, 75-80. ss.
- FOCARDI, S.M., FABOZZI, F.J. (2004). *The mathematics of financial modeling and investment management*. New Jersey, John Wiley & Sons.
- FOO, D.A.C. (2009). Modeling market memory as potential indicators of market informational efficiency. *18th World Imacs / Modsim Congress*, Australia, 2009, s.1307-1313. ss.
- GAYATHRI, M., SELVAM, M., LINGARAJA, K., VASANTH V., KARPAGAM, V. (2013). Fractal dimension Of S&P Cnx nifty stock returns. *Asian Journal of Empirical Research*, 3(9), 1166-1190. ss.
- GEWEKE, J., PORTER-HUDAK, S. (1983). The estimation and appication of long memory time series models. *Journal of Time Series Analysis*, 4 (4), 221-238. ss.
- GIRAITIS, L., KOKOSZKA, P., LEIPUS, R., TEYSSIERE, G. (2003). Rescaled variance and related tests for long memory in volatility and levels. *Journal of Econometrics*, 112 (2), 265-294. ss.
- NEITING, T., SEVCIKOVA, H., PERCIVAL, D.B. (2012). Estimators of fractal dimension : assessing the roughness of time series and spatial data. *Statistical Science*, 27 (2), 247–277. ss.
- GRANGER, C.W.J., JOYEUX, R. (1980). An introduction to loag memory time series models and fractional differencing. *Journal of Time Series Analysis*, 1, 5-39. ss.
- GREENE, M.T., FIELITZ, B.D. (1977). Long-term dependence in common stock returns. *Journal of Financial Economics*, 4 (3), 339-349. ss.
- HERGARTEN, S. (2002). *Self-organized criticality in earth systems*. Germany, Springer.
- HIEMSTRA, C., JONES, J. D. (1997). Another look at long memory in common stock returns. *Journal of Empirical Finance*, 4 (4), 373-401. ss.
- HOSKING, J.R.M. (1981). Fractional differencing. *Biometrika*, 68, 165-176.. ss.
- HURST, H.E. (1951). Long-term storage capacity of reservoirs. *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, 116, 770-808. ss.
- KANTELHARDT, J.W., KOSCIELNY-BUNDE, E., REGO, H.H.A., HAVLIN, S., BUNDE A. (2001). Detecting long-range correlations with detrended fluctuation analysis. *Physica A*, 295, 441–454. ss.
- KIM, B.S., KIM, H.S., MIN, S.H. (2014). Hurst’s memory for chaotic, tree ring, and SOI series. *Applied Mathematics*, 5, 175-195. ss.
- KOTOWSKI, S., KOSINSKI, W., MICHALEWICZ, Z., NOWICKI, J., PRZEPIORKIEWICZ, B. (2008). Fractal dimension of trajectory as invariant of genetic algorithms. *Artificial Intelligence and Soft Computing – ICAISC 2008*, 414-425. ss.
- KRISTOUFEK, L., VOSVRDA, M.. (2013). Measuring capital market efficiency: long-term memory, fractal dimension and approximate entropy. *Proceedings of the 31th International Conference Mathematical Methods in Economics*, 470-475. ss.
- KUMAR, D., MAHESWARAN, S. (2012). Long memory in PIIGS economies: an application of wavelet analysis. *Management Review*, 4 (95), 21-34. ss.
- LO, A.W. (1991). Long-term memory in stock market prices. *Econometrica*, 59 (5), 1279-1313. ss.
- MANDELBROT B.B., HUDSON, R.L. (2006). Finans piyasalarında saklı düzen risk, çöküş ve kazanca fraktal yaklaşımlar. (Çev. M. HÜNER) İstanbul, Güncel Yayıncılık.
- MANDELBROT, B. B. (1963). The variation of certain speculative prices. *Journal of Business*, 36, 392–417. ss.

- MANDELBROT, B.B. (1972). Statistical methodology for nonperiodic cycles from covariance to R/S analysis. *Annals of Economic and Social Measurement*, 1, 259-290. ss.
- MANDELBROT, B.B. (1983). *The fractal geometry of nature*. New York, W. H. Freeman.
- MANDELBROT, B.B., WALLIS J.R. (1969a). Computer experiments with fractional Gaussian noises: averages and variances. *Water Resources Research*, 5(1), 228-241. ss.
- MIKOSCH, T., STARICA, C. (1999). *Change of structure in financial time series, long range dependence and the GARCH Model*. Working Paper, The Wharton School, Chalmers University of Technology.
- OSWIECIMKAA, P., DROZDZA, S., KWAPIENA, J., GÓRSKI A.Z. (2010). Fractals, log-periodicity and financial crashes. *Acta Physica Polonica A*, 117 (4), 637-639. ss.
- PENG, C.K., BULDYREV, S.V., HAVLIN, S., SIMONS, M., STANLEY, H.E., GOLDBERGER A.L. (1994). Mosaic organization of DNA nucleotides. *Phys. Rev. E*, 49 (2), 1685-1689. ss.
- PETERS, E. (1994). *Fractal market analysis - applying chaos theory to investment and analysis*. New York, John Wiley & Sons, Inc.
- REGE, S., MARTIN, S.G.. (2011). Portuguese stock market: a long memory process?. *Business: Theory and Practice*, 12 (1), 75-84. ss.
- RELJIN, I.S., RELJIN, B.D. (2002). Fractal geometry and multifractals in analyzing and processing medical data and images. *Archive of Oncology*, 10, (4), 2002, s.283-293. ss.
- SMITH, A. (2005). Level shifts and the illusion of long memory in economic time series. *Journal of Business & Economic Statistics*, 23 (3), 321-335. ss.
- SORNETTE, D. (2003). *Critical phenomena in natural sciences: chaos, fractals, selforganization and disorder: concepts and tools*. New York, Springer Verlag.
- TEL, T. (1988). Fractals, multifractals, and thermodynamics an introductory review. *Z. Naturforsch*, 43a, 1154-1174. ss.
- TSUJI, C. (2003). Long term memory and applying the multi-factor ARFIMA models to financial markets. *Asia Pasific Financial Markets*, 9, 283-304. ss.
- WERON, R. (2002). Estimating long-range dependence: finite sample properties and confidence intervals. *Physica A*, 312, 285 - 299. ss.
- WILLIAMS, B. (1995). *Trading chaos*. New Jersey, John Wiley&Sons.
- WILLIAMS, G. P. (1997). *Chaos theory tamed*. Washington, Joseph Henry Press,
- WILLINGER, W., TAQQU, M. S., TEVEROVSKY, V. (1999). Stock market prices and long-range dependence. *Finance and Stochastics*, 3 (1), 1-13. ss.